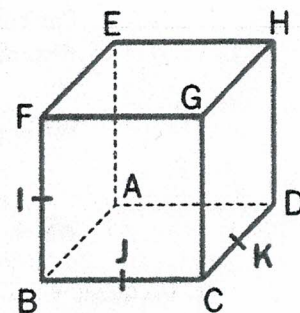


Correction exercice 16 (Séquence 9)

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 ci-contre.

Le point I est le milieu du segment [BF], J est le milieu de [BC] et K est le milieu de [CD].

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.



- 1) Déterminer les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

Dans ce repère, $A(0; 0; 0)$; $G(1; 1; 1)$.

$B(1; 0; 0)$ et $F(1; 0; 1)$. Or, I est le milieu de [BF], donc $I(1; 0; \frac{1}{2})$.

$B(1; 0; 0)$ et $C(1; 1; 0)$. Or, J est le milieu de [BC], donc $J(1; \frac{1}{2}; 0)$.

$C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$. Or, K est le milieu de [CD], donc $K(\frac{1}{2}; 1; 0)$.

- 2) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

A est l'origine du repère, donc les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ correspondent aux coordonnées de G.

Donc $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De même, on obtient $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-\frac{1}{2}) = 0$. Donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{IJ}$.

Et, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IK} = 1 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times 1 + 1 \times (-\frac{1}{2}) = 0$. Donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{IK}$.

Or, les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas proportionnelles. Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $(\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK})$ est un couple de vecteurs non colinéaires qui dirige le plan (IJK).

Donc $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

- 3) On considère le point $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

- a. Montrer que les points N, I, J et K sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que les points N, I, J et K sont coplanaires revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires ce qui revient à déterminer les réels x et y tels que : $\overrightarrow{IN} = x\overrightarrow{IJ} + y\overrightarrow{IK}$ (S).

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = 0 \times x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + y \\ 0 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + y \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Finalement, $\overrightarrow{IN} = -\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont donc coplanaires ; il en est de même pour les points N, I, J et K.

- b. Montrer que les points A, G et N sont alignés.

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points A, G et N sont alignés.

- c. En déduire la distance du point G au plan (IJK).

Tout d'abord, d'après la question 2), la droite (AG) est orthogonale au plan (IJK).

En outre, d'après la question 3)b, le point N appartient à la droite (AG).

Ainsi, la droite (AN) est orthogonale au plan (IJK). (*)

Ensuite, d'après la question 3)a, le point N appartient au plan (IJK). (**)

Par conséquent, d'après (*) et (**), le point N est le projeté orthogonal du point G sur le plan (IJK). La distance du point G au plan (IJK) est donc la distance GN et elle vaut :

$$GN = \|\overrightarrow{GN}\| = \sqrt{(x_N - x_G)^2 + (y_N - y_G)^2 + (z_N - z_G)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}$$

$$GN = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) On désigne par M un point du segment [AG].

a. Justifier l'existence d'un réel t de $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

$M \in [AG]$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.

Donc il existe un réel t de $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

b. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

D'après les questions 2) et 4)a, $M(t; t; t)$ et d'après la question 1), $I(1; 0; \frac{1}{2})$.

Or, $MI = \sqrt{(x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 + (z_I - z_M)^2}$; soit $MI^2 = (x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 + (z_I - z_M)^2$.

Donc $MI^2 = (1 - t)^2 + (-t)^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$, soit $MI^2 = 1 - 2t + t^2 + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2$.

D'où $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

c. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance MI soit minimale.

MI est minimale $\Leftrightarrow MI^2$ est minimale, car $MI \geq 0$.

Or, $3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$ est un polynôme du second degré avec $a = 3; b = -3$ et $c = \frac{5}{4}$.

Comme $a > 0$, ce trinôme est minimal en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$. MI est minimale $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, les coordonnées de M sont $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et M est confondu avec le point N.

5) a. Montrer que le point $R(1; \frac{3}{4}; -\frac{1}{4})$ est le pied de la hauteur issue de K dans le triangle IJK.

Il suffit de montrer que $(KR) \perp (IJ)$ et que $R \in (IJ)$.

Or, $\overrightarrow{KR} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Et, $\overrightarrow{KR} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc $\overrightarrow{KR} \perp \overrightarrow{IJ}$ et $(KR) \perp (IJ)$.

D'autre part, $\overrightarrow{IR} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{IR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{IR}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et $R \in (IJ)$.

On en déduit donc que R est le pied de la hauteur issue de K dans le triangle IJK.

b. Déterminer le volume du tétraèdre GIJK.

Soit V le volume du tétraèdre GIJK.

$V = \frac{1}{3} \times \frac{IJ \times KR}{2} \times GN$, d'après 5a) et 3c).

On détaille les calculs, et on obtient : $IJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $KR = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Finalement, $V = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

On détaille les calculs, et on obtient : $V = \frac{1}{16} u.v.$